# לוגיקה (1) – פתרונות תרגיל 13

.1

א. לשם נוחות נניח שבשפה יש לנו תו מיוחד, המשמש תו מפריד (למשל ","). בהינתן $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ נגדיר פונקציה העוברת על הקלטים אחד אחד, ומוסיפה "," בין כל שני קלטים. הפונקציה $J$ תחזיר את המחרוזת המתקבלת.
נגדיר פונקציה $f_0$ הסופרת את מספר ה-"," במחרוזת. בהינתן מחרוזת $\psi$ ומספר טבעי $i$ נגדיר פונקציה $f_1$ המחזירה $\langle",",1\rangle$ אם $f_0(\psi)<i$ ו- $\langle\psi,i\rangle$ אחרת. נגדיר פונקציה $f_2(\psi,i)$ אשר מוצאת את ה-"," ה-$i$ במחרוזת $\psi$ ומחזירה את התת-מחרוזת שבין ה-"," הזה לבין ה-"," הקודם לו (או לראש המחרוזת אם אין "," קודם). לבסוף נגדיר $\pi(\psi,i)=f_2(f_1(\psi,i))$. קל לוודא ש-$f$ שלמה ומבצעת את הדרוש.

ב. בינתן $x_1,\ldots,x_2$ יש אלגוריתם $A$ המחשב את $f(x_1,\ldots,x_2)$ (כי $f$ חשיבה). כיוון ש-$R$ חשיב, יש אלגוריתם $B$ אשר לכל $x$ קובע אם הוא ב-$R$ או לא. לכן האלגוריתם $BA(x_1,\ldots,x_2)$ עונה על הדרישות.

ג. כיוון ש- $S_i$ כריע חיובית, יש יחס כריע $R_i$ כך ש- $\exists xR_i(y,x)=S_i(y)$. נגדיר את היחסים הבאים על מחרוזות: $C(x)$ אומר ש-$x$ הוא שרשור של שתי מחרוזות (זהו יחס כריע, לפי סעיף ב'). עתה תהי $\pi(x,i)$ פונקצית ההיטל שהוגדרה בסעיף הקודם. נגדיר את היחס $R(y,x)=C(x)\wedge R(y,\pi(x,1))\wedge R(y,\pi(x,2))$ וברור ש- $\exists xR(y,x)\Leftrightarrow \exists x_1R_1(y,x_2)\wedge\exists x_2R_2(y,x_2)\Leftrightarrow y\in S_1\cap S_2$.

ד.

$i$) בהינתן קבוצת פסוקים סופית $T=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ יהי $R_T(\varphi,\psi)$ היחס המוגדר ע"י: $\psi$ עד לכך ש- $\models\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to\varphi$ אמיתי לוגית. ראיתם בכיתה שזה אמנם יחס כריע, וכי התנאי $\models\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to\varphi$ שקול לכך ש- $T\models\varphi$.

$ii$) ראשית נחליף את היחס $R_T(\varphi,\psi)$ שהוגדר לעיל ביחס $R(\varphi,\chi,\psi)$ האומר: $\chi$ היא מחרוזת של פסוקים ו- $\psi$ עד לכך ש- $\models\pi(\chi,1)\wedge\ldots\wedge\pi(\chi,n)\to\varphi$ אמיתי לוגית (כאשר $n$ הוא מספר האיברים המשורשרים ב- $\chi$). ממה שעשינו עד כה ברור שזהו יחס כריע. כיוון ש-$T$ כריעה גם היחס $R_T(\varphi,\chi,\psi)$ האומר "$\chi$ היא מחרוזת של פסוקים **מתוך $T$** ו- $\psi$ עד לכך ש- $\models\pi(\chi,1)\wedge\ldots\wedge\pi(\chi,n)\to\varphi$" אמיתי לוגית, ולבסוף גם היחס $R_T(\varphi,\gamma)$ האומר: "$\gamma$ היא זוג, כך ש- $R_T(\varphi,\pi(\gamma,1),\pi(\gamma,2))$ מתקיים", גם הוא יחס כריע, כנדרש.

$iii$) לפי משפט הקומפקטיות, אם $T\models\varphi$ יש איזו קבוצת פסוקים $T'\subseteq T$ סופית כך שכבר $T'\models\varphi$. לכן לפי סעיף קודם יש עדות $\psi$ לכך ש- $T'\models\varphi$, כלומר $R_T(\varphi,J(T'),\psi)$ מתקיים, ולכן $R_T(\varphi,\langle J(T'),\psi\rangle)$ מתקיים, כדרש.

מצד שני, אם $R_T(\varphi,\gamma)$ מתקיים, אזי $R_T(\varphi,\pi(\gamma,1),\pi(\gamma,2))$ מתקיים וזה אומר ש- $\pi(\gamma,1)$ קבוצת פסוקים מ- $T$ ו- $\psi$ עדות לכך שקב' פסוקים זו גוררת לוגית את $\varphi$. בפרט $T\models\varphi$.

2. ראשית, נוכיח את הטענה עבור ש"ע באינדוקציה על יצירת שמות העצם:

א. אם $t=c$ לאיזה קבוע אישי, אין מה להוכיח. אם $t=x$ הטענה נובעת מהנתון.

ב. אם $t=F(t_1,\ldots,t_n)$ אז מה"ה $E(val(A,s,t_i),val(A,s',t_i))$ לכל $i$, ולכן מהגדרת האמת והקשר $\wedge$ יוצא $val(A,\tilde{s},\bigwedge_{i=1\ldots n}E(x_i,y_i))=T$ כאשר $\tilde{s}$ היא השמה כלשהי המקיימת

$\tilde{s}(x_i) = s(x_i)$ ו- $\tilde{s}(y_i) = s'(x_i)$. לכן מהנתון על $E$ יוצא ש-
$val(A, \tilde{s}, E(F(x_1, \ldots, x_n), F(y_1, \ldots, y_n))) = T$ אבל זה בדיוק (מהגדרת האמת ומבחירת $\tilde{s}$) שקול לכך ש- $val(A, E(val(A, s, t), val(A, s', t)) = T$.

ג. ההוכחה עבור נוסחות אטומיות זהה כמעט מילה במילה.

ד. ההוכחה עבור צירופים בוליאניים של נוסחות נובעת באינדוקציה טריביאלית.

ה. נטפל במקרה של נוסחה מהצורה $\psi = \exists z \varphi(\bar{x}, z)$: אם $val(A, s, \psi) = T$ יש השמה $\tilde{s} \supset s$ כך ש- $val(A, \tilde{s}, \varphi(\bar{x}, z)) = T$. נגדיר $\tilde{s}' \supset s'$ ע"י $\tilde{s}'(z) = \tilde{s}(z)$. אז $E(\tilde{s}(x), \tilde{s}'(x))$ מתקיים לכל $x$ ולכן הטענה נובעת מה"ה.

3.

א. אם $x_i \equiv y_i(3)$ אז גם $x_1 + x_2 \equiv y_1 + y_2(3)$, לכן החיבור אדיש ליחס השקילות מודולו 3. כנ"ל ביחס לכפל.

ב. נניח ש- $x_1 \equiv x_2(6)$, ו- $y_i = x_i + 3i$ אז $x_i \equiv y_i(3)$ אבל אין זה נכון ש- $y_1 \equiv y_2(6)$. לכן שקילות מודולו 6 אינה אדישה לשקילות מודולו 3. באופן דומה גם היחס > אינו אדיש לשקילות מודולו 3.

ג. $x_1 \equiv x_2(3)$ $y_i = x_i + 6j_i$ (כלומר $x_i \equiv y_i(6)$) אז $y_1 \equiv y_2(3)$.

4. תהיה $T$ תורה כלשהי בשפה $L$ שיש לה מודל אינסופי אחד לפחות. בה"כ אפשר להניח ש-$T$ מכילה את האקסיומות המבטיחות ש->סדר קווי. נוסיף ל-$L$ אינסוף קבועים חדשים $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ ונוסיף את אוסף האקסיומות $\Delta = \{c_i < c_{i+1}\}_{i=1}^{\infty}$. נוכיח ש- $T \cup \Delta$ עקבית. ממשפט הקומפקטיות יספיק להראות שכל תת-קבוצה סופית שלה היא עקבית ולכן יספיק להוכיח ש- $T \cup \Delta_j$ עקבית לכל $j$, כאשר $\Delta_j = \{c_i < c_{i+1}\}_{i=1}^{j}$ (זה יספיק כי כל קבוצה סופית ב- $T \cup \Delta$ חלקית לאיזה קבוצה מהצורה $T \cup \Delta_j$, ולכן בודאי שמודל של האחרונה יהיה גם מודל של הראשונה). יהי אם כן $M$ מודל אינסופי של $T$ ותהי $M_j \subset M$ קבוצה כלשהי מגודל $j+1$. כיוון שמהנחתנו > סדר קווי על $M$ בפרט זהו סדר קווי על $M_j \subset M$. כיוון שזו קבוצה סופית יש לה איבר מזערי $a_1$, ונגדיר $c_1^M = a_1$, עתה גם ל- $M_j \setminus \{a_1\}$ איבר מזערי, $a_2$ ונגדיר $c_2^M = a_2$, באופן זה נוכל להמשיך באינדוקציה עד שנמצה את הקבוצה $M_j$. אבל קל לוודא שהמבנה $M'$ שקיבלנו הוא מודל של $T \cup \Delta_j$ (לפי שאלה 4 בתרגיל 9 בוודאי שהוא מודל של $T$, ולפי הגדרת הפרוש לקבועים החדשים ב- $M'$ ברור זהו מודל של $\Delta_j$). קיבלנו אם כן שלכל $j$ $T \cup \Delta_j$ עקבית, ולכן $T \cup \Delta$ ולכן יש לה מודל $N$ (מדוע בהכרח כל מודל כזה הוא אינסופי) אבל $N$ הוא בפרט מודל של $T$, וב-$N$ יש סדרה אינסופית יורדת.